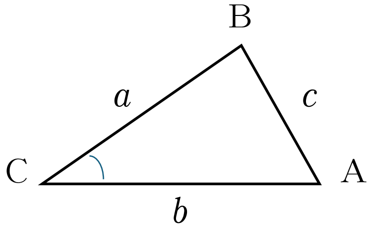
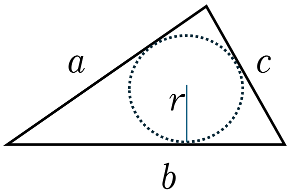
特にベクトルや行列は美しい

三角形の面積の公式には色々ある。

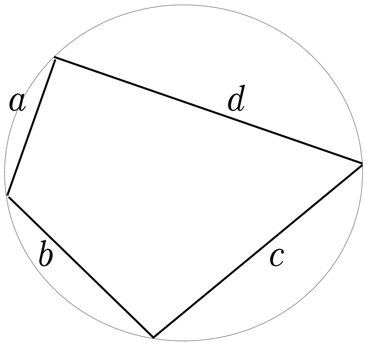


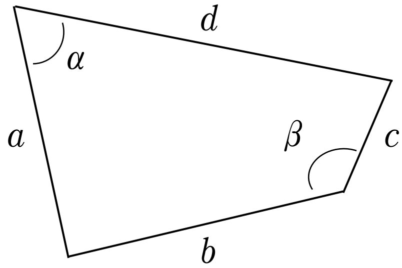


$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=sr$$ など

ただし、 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ …半周長 ， r … 内接円の半径

さらに、円に内接する四角形や一般の四角形については





$$\mathrm{S}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

ただし、 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ …半周長

$$\mathrm{S}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

ただし、 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ …半周長, αとβは対角

つまり、三角形や四角形の面積の公式を一般化していくとそこには美しさはあるが、**何とかならないのか？**と思ってしまう。　一般のブレート・シュナイダーの公式で、$\alpha+\beta$が 180° のときに、内接四角形の公式となり、 $d=0$ のときに、三角形の公式となる。

ちなみに、$\mathrm{S}=\dfrac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2(1-\cos^2\mathrm{C})}=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\underline{\boldsymbol{a^2b^2\cos^2C}}}$ より

ベクトルの<u>内積</u>を考えたくなる。そこで、ベクトルの導入をすると次のようになる。

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}ab\sin\mathrm{C}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2(1-\cos^2\mathrm{C})}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-a^2b^2\cos^2C}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2C}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$ となる。　よって、 $\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$ とすると、

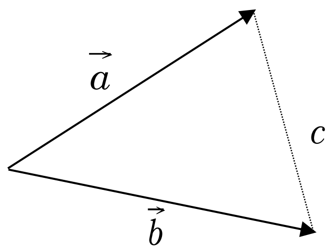
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2-2a_1a_2b_1b_2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|$$ となる。

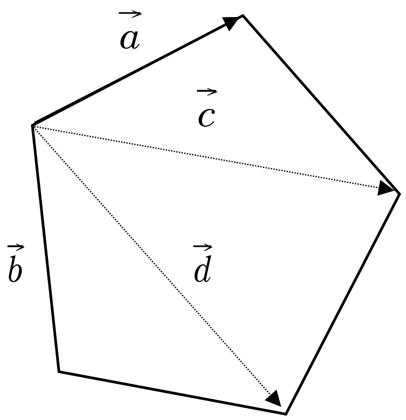
さらに行列式に表すと、$S=\frac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{matrix}\right\|$ となる。

つまり、三角形の面積は2つのベクトルの張る平行四辺形の半面積 $S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{matrix}\right\|$ であり、

四角形やあらゆる多角形は２ベクトルの張る半面積の和で表されることになる。

（極めて美しい！）





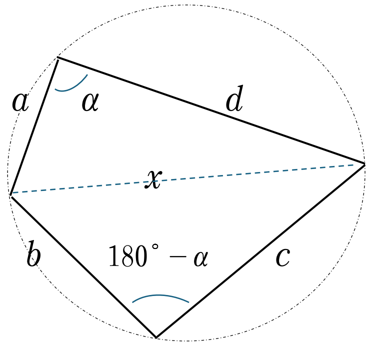
また、「ブレート・シュナイダーの公式」を自分なりに証明してみたが、ヘロンと同様に

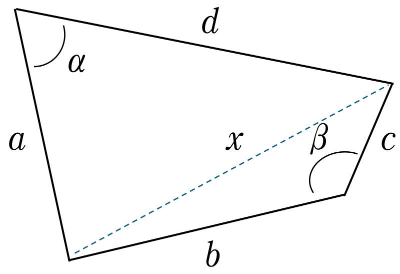
$(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$ … この形が意味を成す。

なぜこんなにも美しいのか？ベクトルの張る面積と何か関係があるように思えてならない！・・・この直観はなかなか難しい（腑に落ちない）。何故か『素敵な直観』（虚点理論）の行列とそっくりなのが気になって仕方がない。最後まで分からないかもしれない。

2025.4.10　自宅にて

証明をもう一度、確認してみよう！





内接四角形の証明

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}ad\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}ad\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\alpha \qquad (\because \sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}(ad+bc)\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{1}{2}(ad+bc)\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} \qquad \cdots\cdots ①$$

いま、余弦定理より

$$x^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos(180^\circ-\alpha)$$
$$=b^2+c^2+2bc\cos\alpha \qquad (\because \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha)$$

よって、

$$a^2+d^2-b^2-c^2=2ad\cos\alpha+2bc\cos\alpha$$
$$=2(ad+bc)\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \cos\alpha=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$ となる。

よって、

$$1+\cos\alpha=\frac{2(ad+bc)+a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}=\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2(ad+bc)}=\frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2(ad+bc)}$$

$$1-\cos\alpha=\frac{2(ad+bc)-a^2-d^2+b^2+c^2}{2(ad+bc)}=\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2(ad+bc)}=\frac{(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{2(ad+bc)}$$

① に戻して、

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}(ad+bc)\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$$
$$=\frac{1}{2}(ad+bc)\sqrt{\frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2(ad+bc)}\cdot\frac{(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{2(ad+bc)}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4}(ad+bc)^2\frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2(ad+bc)}\cdot\frac{(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{2(ad+bc)}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{16}(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)}$$
$$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad //$$

ただし、 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ $\cdots\cdot$ 半周長

一般の四角形の証明

図より、$S=\dfrac{1}{2}ad\sin\alpha+\dfrac{1}{2}bc\sin\beta=\dfrac{1}{2}(ad\sin\alpha+bc\sin\beta)$　　平方して、

$$S^2=\frac{1}{4}(ad\sin\alpha+bc\sin\beta)^2=\frac{1}{4}(a^2d^2\sin^2\alpha+b^2c^2\sin^2\beta+2abcd\sin\alpha\sin\beta)$$

$$\therefore\quad 4S^2=a^2d^2\sin^2\alpha+b^2c^2\sin^2\beta+2abcd\sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots ①$$

また、余弦定理より

$x^2=a^2+d^2-2ad\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos\beta$　　よって、 $a^2+d^2-b^2-c^2=2ad\cos\alpha-2bc\cos\beta$

平方して、

$$(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=4(ad\cos\alpha-bc\cos\beta)^2=4(a^2d^2\cos^2\alpha+b^2c^2\cos^2\beta-2abcd\cos\alpha\cos\beta)$$

$$\therefore\ \frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=a^2d^2\cos^2\alpha+b^2c^2\cos^2\beta-2abcd\cos\alpha\cos\beta \qquad \cdots\cdots ②$$

①＋②：　$4S^2=a^2d^2\sin^2\alpha+b^2c^2\sin^2\beta+2abcd\sin\alpha\sin\beta$

$\dfrac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=a^2d^2\cos^2\alpha+b^2c^2\cos^2\beta-2abcd\cos\alpha\cos\beta$　　より

$4S^2+\dfrac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(\alpha+\beta)$　　（∵相互関係及び加法定理より）

よって、

$$\begin{aligned}16S^2&=-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2+4(a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(\alpha+\beta))\\&=-\{(a^2+d^2)^2-2(a^2+d^2)(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2\}+4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd\cos(\alpha+\beta)\\&=-a^4-d^4-b^4-c^4+2(a^2d^2+b^2c^2+a^2b^2+b^2d^2+a^2c^2+c^2d^2)-8abcd\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

$$=-a^4-d^4-b^4-c^4+2(a^2d^2+b^2c^2+a^2b^2+b^2d^2+a^2c^2+c^2d^2)\boldsymbol{+8abcd}$$
$$\boldsymbol{-8abcd}-8abcd\cos(\alpha+\beta)$$

$$=(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)\ \boldsymbol{-8abcd}-8abcd\cos(\alpha+\beta)$$
$$=(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)\ -8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))$$
$$=(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)\ -8abcd\cdot 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

（∵ $\cos 2\gamma=2\cos^2\gamma-1$ より $1+\cos 2\gamma=2\cos^2\gamma$ ）

$$=(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)\ -16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\therefore S^2=\frac{1}{16}(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)\ -abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad /\!/$$

何回か証明をして慣れてはいるが、やはり未だに

$(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$ の部分の不思議さ

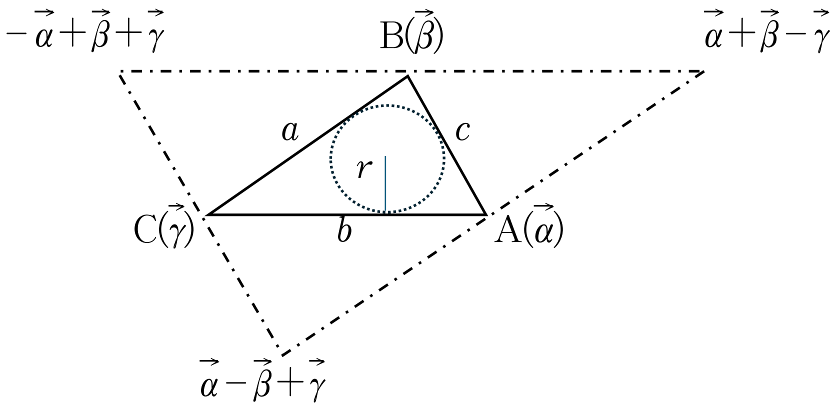
が腑に落ちず悩まされる。誰かに教わりたいが、分かりそうで少し悔しい気持ちもある。

『分点公式（内分と外分は同等であった）』と同じように納得のいく、何かがあるはずで

あると信じている。

2025.4.13　自宅にて

とりあえず、三角形の面積についてヘロンの公式の不思議さ（美しさ）について考えてみた。



図のように、ベクトル（や行列）などとの関係をいくら考えても分からないので、ベクトルから目を離し、３辺の長さのみに着目してみた。すると、以下のようになった。

$\mathrm{S}=sr=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　より

$s^2r^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$　　　　$\therefore\ sr^2=(s-a)(s-b)(s-c)$

$$\therefore\ r^2=\frac{1}{s}(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}{\frac{a+b+c}{2}}$$

$$=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}$$ となる。

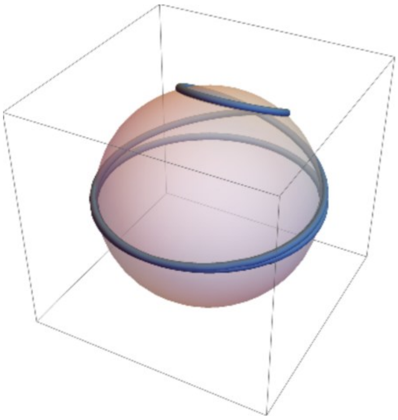
つまり、内心の半径 r と三角形の３辺 a,b,c とは

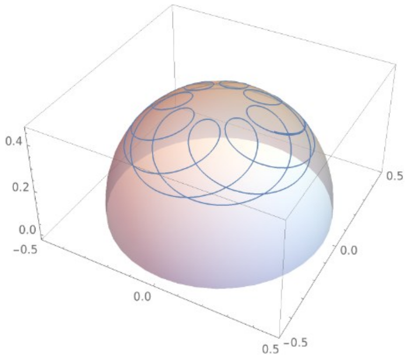
$$4r^2=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a+b+c}$$

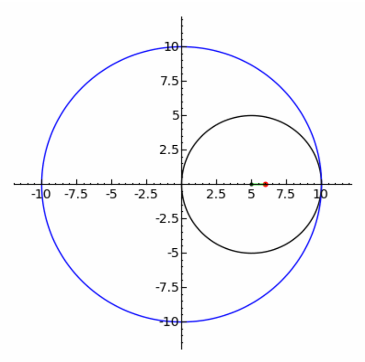
の美しい関係があって、この美しさがそのまま単純に面積の公式に反映されているものと直観した。「鶏（にわとり）と卵（たまご）どっちが先？」に似ているが、とりあえず面積を語る前に長さの美しさを語ることが先だと思い、「面積公式の美しさはその内心の美しさに起因する」ことを今回は直観し納得することとした。・・・・・・・・　しかし、・・・四角形の面積公式の絶妙な美しさが悩ましい・・・・・・・まだ考察は続く！

2025.5.8　自宅にて

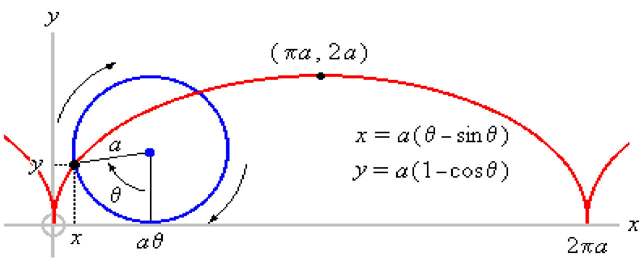
最近なぜか、円運動について考えてみた。トロコイド曲線である。







まずサイクロイドの拡張 「半径a の円の中心Cからb の距離の点P(x,y) 」を考えた。



円の中心$\mathrm{C}(a\theta, a)$ に対して、求めるサイクロイドP(x,y) は次のように求められる。

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(-b\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right), b\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right) \cdots\cdots\left(\theta>\frac{\pi}{2}\text{ のとき}\right)$$

$$=(-b\sin\theta, -b\cos\theta) \cdots\cdots\left(\text{つまり、}0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{ のとき考えやすい}\right)$$

より

P(x,y) の媒介変数表示は、

一般に $\begin{cases} x=a\theta-b\sin\theta \\ y=a-b\cos\theta \end{cases}$ となる。

また、$a=b$ のときに $\begin{cases} x=a\theta-a\sin\theta=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a-a\cos\theta=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ サイクロイド となる。

ここでもやはり、ベクトルの四則演算は役に立った。 $(\because\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})$

次に、内サイクロイドの拡張である。（アステロイドから考えた。）

「大円の半径R、内接円の半径r_1 、内接円の中心Cから距離r_2 の点$\mathrm{P}(x,y)$ 」を求めたい。

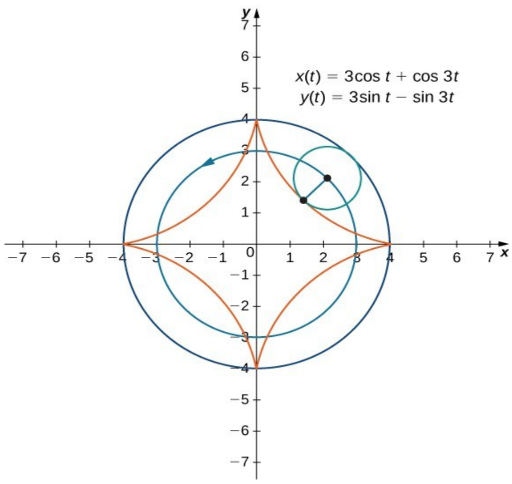
点Cは $((\mathrm{R}-r_1)\cos\theta, (\mathrm{R}-r_1)\sin\theta)=((4-1)\cos\theta, (4-1)\sin\theta)$ である。

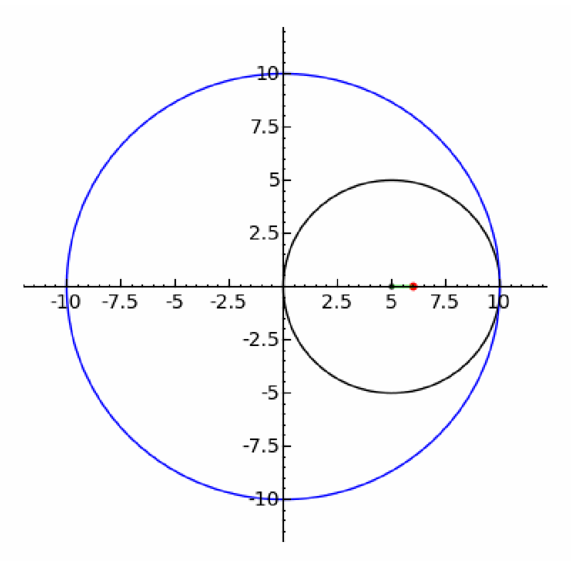
２円の中心と接点は常に同一直線上にあるから、$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ とこの直線とのなす角をθ_1 とすると

$\mathrm{R}\theta=r_1\theta_1$ より $\theta_1=\dfrac{\mathrm{R}}{r_1}\theta$ である。 下図のアステロイドの場合 $\theta_1=\dfrac{4}{1}\theta=4\theta$ となる。よって、

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(r_2\cos(\theta-\frac{\mathrm{R}}{r_1}\theta), r_2\sin(\theta-\frac{\mathrm{R}}{r_1}\theta))=(r_2\cos(1-\frac{\mathrm{R}}{r_1})\theta, r_2\sin(1-\frac{\mathrm{R}}{r_1})\theta)$$
$$=(r_2\cos(1-\frac{4}{1})\theta, r_2\sin(1-\frac{4}{1})\theta)=(r_2\cos(-3\theta), r_2\sin(-3\theta))$$

となる。





よって、点$\mathrm{P}(x,y)$ の媒介変数表示は、サイクロイドの時と同様にベクトルの四則演算によって、

一般に
$$\begin{cases} x=(\mathrm{R}-r_1)\cos\theta+r_2\cos(1-\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \\ y=(\mathrm{R}-r_1)\sin\theta+r_2\sin(1-\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \end{cases}$$
となる。

左図のアステロイドの場合は $\mathrm{R}=4,\ r_1=1,\ r_2=1$ であるから、代入すると

$$\begin{cases} x=(\mathrm{R}-r_1)\cos\theta+r_2\cos(1-\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta=3\cos\theta+\cos(-3\theta)=3\cos\theta+\cos3\theta \\ y=(\mathrm{R}-r_1)\sin\theta+r_2\sin(1-\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta=3\sin\theta+\sin(-3\theta)=3\sin\theta-\sin3\theta \end{cases}$$

また、３倍角の公式、$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta, \cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ によって、

$$\begin{cases} x=3\cos\theta+\cos3\theta=4\cos^3\theta \\ y=3\sin\theta-\sin3\theta=4\sin^3\theta \end{cases}$$ となり、$$\begin{cases} \cos^3\theta=\dfrac{x}{4} \\ \sin^3\theta=\dfrac{y}{4} \end{cases}$$ より $$\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

つまり、 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$ となる。（$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$） ・・・ 美しい！

次に、外サイクロイドの拡張である。（カージオイドから考えた。）

「大円の半径R、外接円の半径r_1 、外接円の中心Cから距離r_2 の点$\mathrm{P}(x,y)$ 」を求めたい。

（カージオイドは $\mathrm{R}=r_1=r_2=a$ という場合で、アステロイドと同様に超特殊） よって、

点Cは $((\mathrm{R}+r_1)\cos\theta, (\mathrm{R}+r_1)\sin\theta)=((a+a)\cos\theta, (a+a)\sin\theta)=(2a\cos\theta, 2a\sin\theta)$ である。

２円の中心と接点は常に同一直線上にあるから、$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ とこの直線とのなす角をθ_1 とすると

$\mathrm{R}\theta=r_1\theta_1$ より $\theta_1=\dfrac{\mathrm{R}}{r_1}\theta$ である。 カージオイドの場合 $\theta_1=\dfrac{a}{a}\theta=\theta$ となる。 また、

x軸の正の向きとなす角は、θの錯角を含めて $\pi+\theta+\theta_1$ である。 よって、

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(r_2\cos\left(\pi+\theta+\frac{\mathrm{R}}{r_1}\theta\right), r_2\sin\left(\pi+\theta+\frac{\mathrm{R}}{r_1}\theta\right)\right)=\left(-r_2\cos\left(1+\frac{\mathrm{R}}{r_1}\right)\theta,\ -r_2\sin\left(1+\frac{\mathrm{R}}{r_1}\right)\theta\right)$$

$$=(-a\cos(1+1)\theta,\ -a\sin(1+1)\theta)=(-a\cos2\theta,\ -a\sin2\theta)\cdots\cdots$$ カージオイドの場合

となる。 まず、カージオイドを求めてみよう。 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ によって、$\mathrm{P}(x,y)$ は

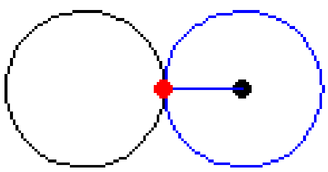
$\begin{cases} x=2a\cos\theta-a\cos2\theta \\ y=2a\sin\theta-a\sin2\theta \end{cases}$ となり、$\begin{cases} \cos2\theta=2\cos^2\theta-1 \\ \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$ より $\begin{cases} x=2a\cos\theta(1-\cos\theta)+a \\ y=2a\sin\theta(1-\cos\theta) \end{cases}$

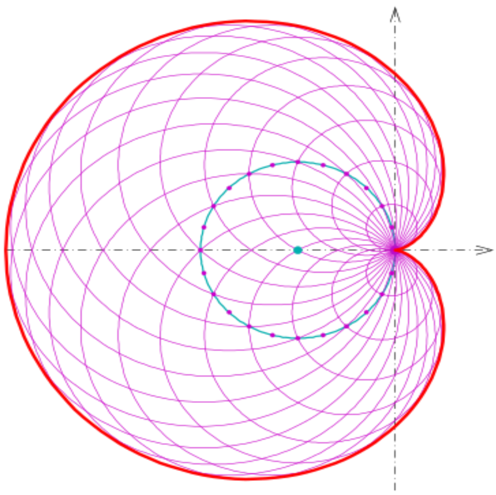
となる。 これは **x軸方向、左側にaだけ平行移動すると $x-a=\mathbf{x}$ は**

$$\begin{cases} x-a=2a\cos\theta(1-\cos\theta) \\ y=2a\sin\theta(1-\cos\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{x}=2a\cos\theta(1-\cos\theta) \\ y=2a\sin\theta(1-\cos\theta) \end{cases}$$ となり、

$\begin{cases} \mathbf{x}=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$（極方程式） に変換すると $r=\dfrac{\mathbf{x}}{\cos\theta}=\dfrac{y}{\sin\theta}$ により、

$r=2a(1-\cos\theta)$ となる。 ・・・・・ アステロイドと同じく、極めて美しい。





そして、外サイクロイドの拡張から、内外サイクロイドの共通の公式を探ろう。

先のカージオイドに習って、外サイクロイドの一般形は次のようになる。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ 　によって、$\mathrm{P}(x,y)$ は

一般に
$$\begin{cases} x=(\mathrm{R}+r_1)\cos\theta-r_2\cos(1+\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \\ y=(\mathrm{R}+r_1)\sin\theta-r_2\sin(1+\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \end{cases}$$
である。

アステロイドのときの内サイクロイドの一般形は

$$\begin{cases} x=(\mathrm{R}-r_1)\cos\theta+r_2\cos(1-\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \\ y=(\mathrm{R}-r_1)\sin\theta+r_2\sin(1-\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \end{cases}$$
であった。

ただし、ウィキペディアなどの公式には $(1-\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta$ のところが異なる表記が多い。

例えば、$\cos(1-\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta=\cos(-\dfrac{\mathrm{R}-r_1}{r_1})\theta=\cos(\dfrac{\mathrm{R}-r_1}{r_1}\theta)$ 　と表現し、

また、$\sin(1-\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta=\sin(-\dfrac{\mathrm{R}-r_1}{r_1})\theta=-\sin(\dfrac{\mathrm{R}-r_1}{r_1}\theta)$ としている。

この表現では内外サイクロイドは「内外分点公式」(別添)の様に一つに表現できない！

内外サイクロイドも見るからにもう少しで、同じように一つにまとめる事が出来る！

実は２円の中心と接点は常に同一直線上にあるから、$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ とこの直線とのなす角 θ_1 との関係は、スタートの始線にヒントがあると考えられる。つまり、同一直線上に半径の向きを考えると、外サイクロイドは $\mathrm{R},\ r_1,\ r_2$ がそれぞれ+(プラス), +(プラス), −(マイナス)であり、同一直線上に内サイクロイドは $\mathrm{R},\ r_1,\ r_2$ がそれぞれ+(プラス), −(マイナス), +(プラス)　である。

したがって、統一した内外サイクロイド公式は次のようになる。

一般に
$$\begin{cases} x=(\mathrm{R}+r_1)\cos\theta+r_2\cos(1+\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \\ y=(\mathrm{R}+r_1)\sin\theta+r_2\sin(1+\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \end{cases}$$
を基準とし、

外サイクロイドは (r_1,r_2) の符号が $(+r_1,-r_2)$ となる。
また、内サイクロイドは (r_1,r_2) の符号が $(-r_1,+r_2)$ となる。

これまでの話は、２次元平面上でのトロコイド曲線運動である。想像は今後も膨らむ。

2025.8.7　自宅にて

トコロイド曲線のような多少複雑な円運動も実は一つの公式に統一することができたわけだが、私は今後もあたかも小説を書くかのように、代数的に（あくまで理論上のものとして）「安定した３次元空間（ヒルベルト空間）上、任意の円運動は波動関数に帰着できる。」ことを示していきたい。あくまでも理論上のいわゆる『直観』である。

２次元平面上、トコロイド曲線は以下の公式に統一された。

一般に $\begin{cases} x=(\mathrm{R}+r_1)\cos\theta+r_2\cos(1+\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \\ y=(\mathrm{R}+r_1)\sin\theta+r_2\sin(1+\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \end{cases}$ を基準とし、運動する円の半径(r_1,r_2)が

外サイクロイドの符号は$(+,-)$で、内サイクロイドの符号は$(-,+)$となる。

よって、点$\mathrm{P}(x,y)$ のある時間 t における x,y それぞれの座標は次のように近似できる！はずである。

$$\begin{cases} x=(\mathrm{R}+r_1)\cos\theta+r_2\cos(1+\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \\ y=(\mathrm{R}+r_1)\sin\theta+r_2\sin(1+\dfrac{\mathrm{R}}{r_1})\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=r_t\cos\theta_t+\alpha \\ y=r_t\sin\theta_t+f(\theta_t)+\beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=r_t\cos\theta_t+\alpha \\ y=r_t\sin\theta_t+\beta \end{cases}$$

ただし、r_t , θ_t , α , β はある時間 t における定数とし、誤差関数$f(\theta_t)$は上手に無視できるものとする。

（$\because$ x,yの係数および偏角がすべて同じである。）

よって、$x-\alpha=\mathrm{x}$, $y-\beta=\mathrm{y}$ とすると、

$$\Longrightarrow \begin{cases} x-\alpha=\mathrm{x}=r_t\cos\theta_t \\ y-\beta=\mathrm{y}=r_t\sin\theta_t \end{cases}$$ となる。

いま、$\phi=\mathrm{x}+\mathrm{y}i=r_t(\cos\theta_t+i\sin\theta_t)$ とすると、　$\phi=r_t e^{i\theta_t}$　となる。

証）$y=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ を示す。いま、$y=\cos\theta+i\sin\theta$ とする。

両辺をθで微分すると、$\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta+i\cos\theta=i(\cos\theta+i\sin\theta)=iy$

よって、$\dfrac{dy}{d\theta}=iy$　$\therefore$ $dy=iy\,d\theta$ ・・・・・・・ 微分方程式

解くと、$\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=i\int d\theta$ より　$\log_e|y|=i\theta+c$　（cは積分定数）

$|y|=e^{i\theta+c}$　$\therefore$ $y=\pm e^{i\theta+c}=\pm e^c\cdot e^{i\theta}=\mathrm{A}e^{i\theta}$ とおく

$\theta=0$のとき、$y=1+i\cdot 0=1=\mathrm{A}\cdot e^0$ より　$\mathrm{A}=1$ である。よって、$y=e^{i\theta}$ //

また、$\theta_t = kx - \omega t$ とし、x, t の2変数変換すると $\phi = r_t e^{i\theta_t} = r_t e^{i(kx - \omega t)}$ となる。

つまり、一般に様々な円運動する（トコロイド曲線などの）物体（質点）は、オイラーの公式に従って、2 次元平面の場合は中心(α, β) （原点）の波動関数に直すことができた。

　また、この位置ベクトル x は直線や平面に留（とど）まらずに、安定した 3 次元空間で考える事ができる。　つまり、3 次元で波動関数が存在し、波動方程式が成り立つのである。

$r = (x, y, z)$ とすると　$\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$　（△はラプラシアン）

より、

$i\hbar\ \partial/\partial_t \Psi = \{-\hbar^2 \div 2m\ \triangle + \mathrm{V}(r,t)\}\Psi = \widehat{\mathrm{H}}\Psi$　（$\widehat{\mathrm{H}}$はハミルトニアン）となる。

（参考：　目次の一覧　➡　「虚点理論の新解釈」）

やっと、様々な円運動のイメージから『初めに得た自分の直観』に納得がいった気がした。

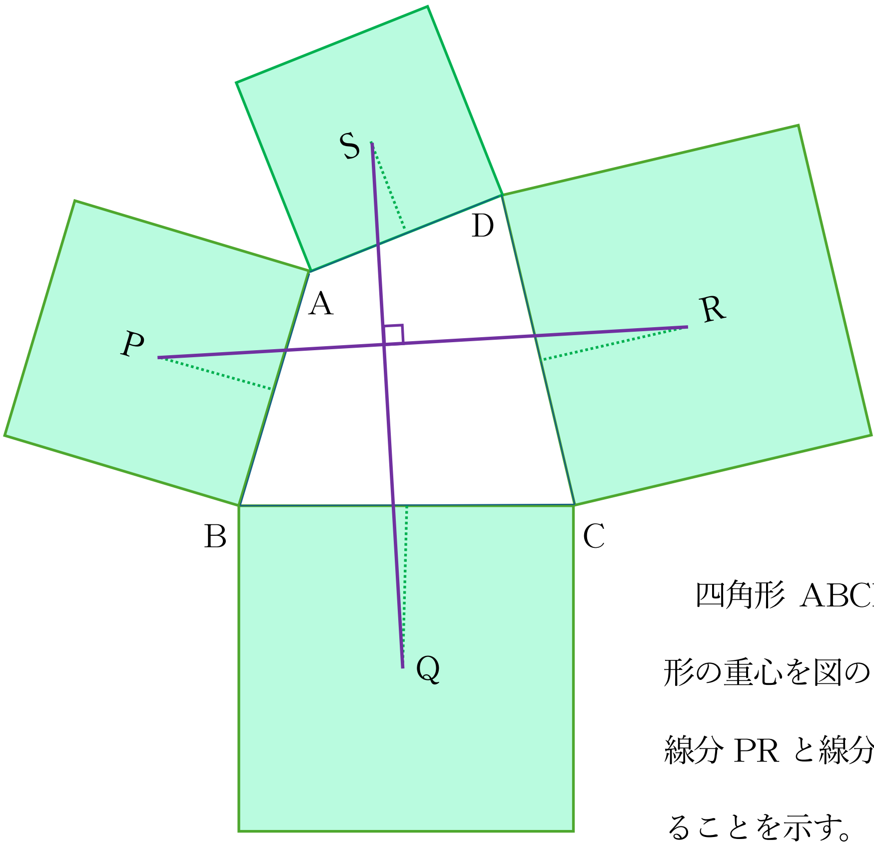
家の玄関に突然咲いた『サボテンの花』です！

2025. 8 .11　自宅にて

先日の四角形の面積公式の絶妙な美しさに悩まされて、いろいろ調べているうちに「オーベルの定理」に出会った。『こんなことが言えるのか？（⇒ 成り立つ！)』と、感動した。

「任意の四角形の各辺に外接する正方形で、対向する辺の正方形の重心を結んだ２線分は、長さが等しくかつ直交する。」　　　である。

しばらくの間、また例によってこの美しい題材に熱中したのであった。



四角形 ABCD の各辺に外接する正方形の重心を図のように P,Q,R,S とする。線分 PR と線分 QS が同じ長さで直交することを示す。

しばらく考えたが、これは図形的に示すのは相当困難であった。(・・・諦めた！)

やはり、ベクトル！ さらに i 回転の複素平面が、超便利で美しい事に気がついた！

証)　４つの正方形の各重心は、各辺の長さの外側に垂直で半分の距離(長さ)である。

つまり、$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$ とすると $\overrightarrow{AP}=\vec{a}+(-i)\vec{a}$ となる。・・・ベクトルの和、時計回り $(-i)$

同様に、$\overrightarrow{BC}=2\vec{b}$ とすると $\overrightarrow{BQ}=\vec{b}+(-i)\vec{b}$,　　$\overrightarrow{CD}=2\vec{c}$ とすると $\overrightarrow{CR}=\vec{c}+(-i)\vec{c}$

$\overrightarrow{DA}=2\vec{d}$ とすると $\overrightarrow{DS}=\vec{d}+(-i)\vec{d}$ 　となる。

いま示したいのは、$\overrightarrow{PR}=(-i)\overrightarrow{QS}$ である。つまり、$\overrightarrow{PR}+i\,\overrightarrow{QS}=\vec{0}$ である。　・・・ ☆

以下、ベクトルの記号を省略して示す。また、A を原点として考えた。

四角形 ABCD が存在するとき、A→B→C→D→A　が閉じているのでベクトルの和が 0 で $2a+2b+2c+2d=0$ となる。よって、 $a+b+c+d=0$ は前提条件である。

$$\mathrm{PR}=\mathrm{AR}-\mathrm{AP}=2a+2b+c-ic-(a-ia)=a+2b+c+i(a-c)$$

また、 $\mathrm{QS}=\mathrm{AS}-\mathrm{AQ}=-d-id-(2a+b-ib)=-2a-b-d+i(b-d)$

よって、 $\mathrm{PR}+i\,\mathrm{QS}=a+2b+c+i(a-c)+i\{-2a-b-d+i(b-d)\}$
$$=a+2b+c-(b-d)+i(a-c-2a-b-d)$$
$$=a+b+c+d-i(a+b+c+d)=0-0i=0$$ となる。 //

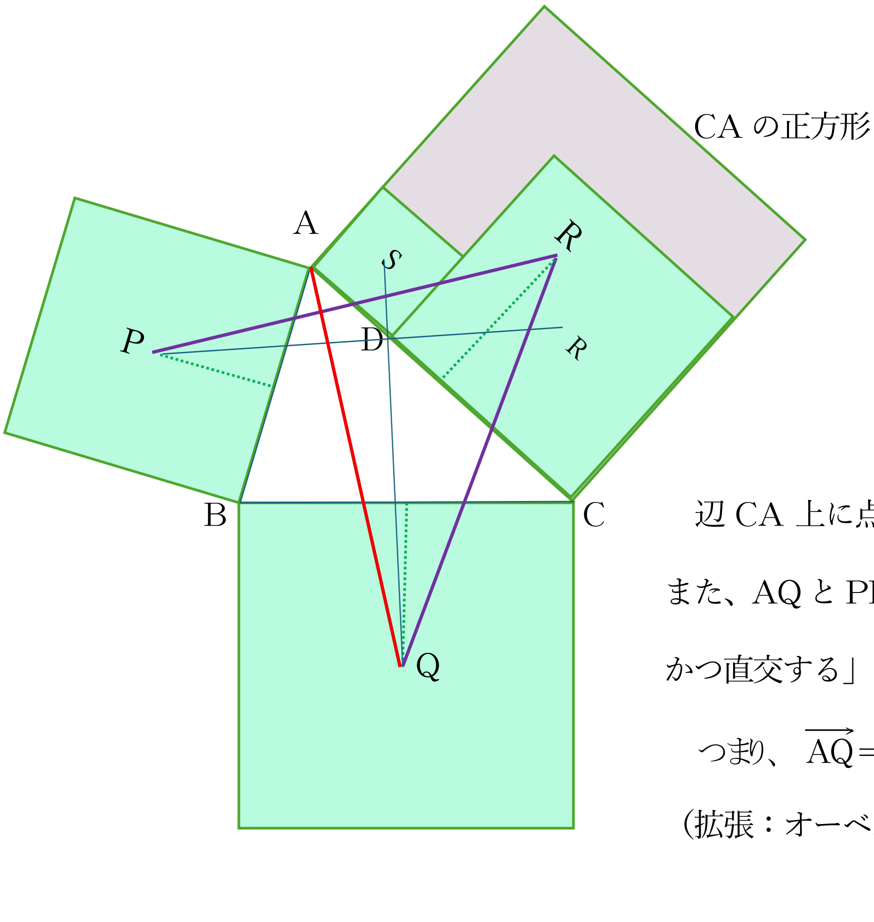
よって、☆ が示されたので、一般に任意の四角形についてこの定理は成り立つ。美しい！！

また振り返って、反時計回り（ i ）の内接重心についても成り立つことが容易に分かる。

（図形はメチャクチャになるが、美しい証明が語っている！($-i \to \mp i$（複号同順にする））

「一般にベクトルで成り立つという事は、もっと一般化できるのではないか？」と考える。

例えば、三角形でも言えるのか？（ナポレオンの定理も面白い！)、　五角形では何が言えるのか？　・・・・・・・　しかし、「オーベルの定理」は三角形の場合、実際にやってみると D を消去した三角形 ABC（辺 CA 上に点 D）の場合は重心 S が重心 R と重なり、図のように可笑(おか)しなことになってしまう。やはり、点 D は消去できない。



辺 CA 上に点 D を残せば大丈夫です。

また、AQ と PR はなぜ？か、「等しくかつ直交する」ことが分かります。

つまり、 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-i\,\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ が言えます。

（拡張：オーベルの定理と言えるか？）

証）　３つの正方形の各重心は、各辺の長さの外側に垂直で半分の距離(長さ)である。

つまり、$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$ とすると $\overrightarrow{AP}=\vec{a}+(-i)\vec{a}$ となる。・・・ベクトルの和、時計回り $(-i)$

同様に、$\overrightarrow{BC}=2\vec{b}$ とすると $\overrightarrow{BQ}=\vec{b}+(-i)\vec{b}$,　　$\overrightarrow{CA}=2\vec{c}$ とすると $\overrightarrow{CR}=\vec{c}+(-i)\vec{c}$ となる。

いま示したいのは、 $\overrightarrow{AQ}=-i\,\overrightarrow{PR}$ である。つまり、 $\overrightarrow{AQ}+i\,\overrightarrow{PR}=\vec{0}$ である。　・・・　☆

以下同様に、ベクトルの記号を省略し、A を原点として証明する。

三角形 ABC が存在するとき、A→B→C→A　が閉じているのでベクトルの和が 0 で、
$2a+2b+2c=0$ となる。よって、　$a+b+c=0$ は前提条件である。

$$\mathrm{AQ}=2a+b-ib\ ,\quad \mathrm{PR}=\mathrm{AR}-\mathrm{AP}=-c-ic-(a-ia)=-a-c+i(a-c)$$

よって、 $\mathrm{AQ}+i\mathrm{PR}=2a+b-ib+i(-a-c+i(a-c))=2a-a+b+c+i(-a-b-c)$
$=a+b+c-i(a+b+c)=0-0i=0$ となる。　//

よって、☆ が示されたので、一般に任意の三角形についてこの公式も成り立つ。まあ、美しい！

また、五角形以上では**あまり面白いことが言えなかった**ので、オーベルの定理には限界がある？と言えるかもしれない。

やはり、「ブレート・シュナイダーの公式」や「オーベルの定理」などは四角形が限界であり、一般化するためには２次元平面が邪魔をしているように思える。比較してベクトルの概念は証明も超便利で美しいし、次元を超えた普遍性を感じる。　・・・ベクトルに大感謝 ッです！！

「ベクトルや行列はすごい！・・・本当に凄(スゴ)い！」

気持ちスッキリ！

大感謝

（フィボナッチ数列と黄金比率　→　生命の進化を直観させる！　…　大感謝！です）

2025. 8 .19　自宅にて