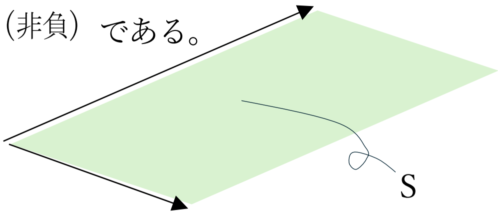
次元の畳み込み

ファーストシーズンで気になっていた、「多次元から 4 次元への畳み込み」について少し考えてみた。昔から勉強嫌いな私であるが、気になって仕方ないので「虚点理論」では勉強不足だった「ケーリーの八元数」について多少勉強した。乱暴な理論（あくまでも小説のようなもの）ではあるが以下のように直観した。まず初めに、この大宇宙は原始的なｎ次元ベクトル空間（線形空間）に（少なくとも）在ると仮定します。いま、２つのベクトルの張る平面は面積Ｓを必ず持つから $S^2 \geqq 0$（非負）である。

よって、



$$S^2 = \left(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\right)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

$= (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \cdots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 + \cdots + b_n{}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n)^2 \geqq 0$　となる。

よって、この線形空間上でシュワルツの不等式は自明である。　つまり、

$(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \cdots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 + \cdots + b_n{}^2) \geqq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n)^2$　である。

さて、この右辺の $(\text{内積})^2$ をバナッハ空間におけるノルム（自乗）の平方として ＝（イコール）を定義したい場合（狭義ヒルベルト空間にしたい！）を考えよう。　つまり、

$(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \cdots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2 + \cdots + b_n{}^2) = c_1{}^2 + c_2{}^2 + c_3{}^2 + \cdots + c_n{}^2$　・・・ ☆

である。すると、☆を満たす次元 n は $n = 1, 2, 4, 8$ のみであることが分かっている。

（なんとッ！1898 年　アドルフ フルウ゛ィッツ）

したがって、この狭義ヒルベルト空間上では８次元が限界であるが、もっと緩（ゆる）いルールでベクトル空間を考えるなら８次元を超える無限次元が存在することになる（ヒルベルト空間も無限次元）。もともと原始多次元空間（ｎ～無限次元ベクトル空間）が物質の存在とともに有り重力から派生して生まれた他の３つの力と合わせてこの４種の力が、より安定した空間を形成してきた（あくまで小説）。安定したわれわれの 4 次元時空間では 5 次元以上の物質を観測することはできないがその裏側に畳み込まれた物質の状態（波動）を探究し、非可換な可測空間や確率論的な非可換確率空間として、次元の畳み込みを逆にたどって真理への挑戦をしていきたい！

畳み込みを逆にたどって真理へ・・・！

実数（一元数 $\mathrm{R}(a)$ 数直線）⇒ 複素数（二元数 $\mathrm{C}(a+bi)$ ガウス 数平面）⇒ 四元数

四元数（ $\mathrm{H}(a+bi+cj+dk)$ ハミルトン 数立体） ⇒ 八元数

八元数（ $\mathrm{O}(a+bi+cj+dk+el+fm+gn+ho)$ ケーリー 数空間） ⇒ 十六元数へ・・・

作り方は簡単で、複素数（二元数）の $\mathrm{C}(a+bi)$ にもう一つの複素数（二元数）を

「入れ子」（マトリョーシカ!?）状態にしてやればよいのだ。

つまり、$a+bi+(c+di)j=a+bi+cj+d\boldsymbol{ij}=a+bi+cj+d\boldsymbol{k}$ とする 。 同様にして、

$a+bi+cj+dk+(e+fi+gj+hk)l=a+bi+cj+dk+el+f\boldsymbol{il}+g\boldsymbol{jl}+h\boldsymbol{kl}$
$=a+bi+cj+dk+el+f\boldsymbol{m}+g\boldsymbol{n}+h\boldsymbol{o}$ とする 。

さて、ノルムの概念としてフルウ゛ィッツは ☆ を満たすものを考えたが、それよりも少し

きつい条件（厳しい条件）で $|a|^2|b|^2=|ab|^2$ **つまり** $\|a\|\|b\|=\|ab\|$ **が言えるか？**

・・・「希望的探求」である！

$n=1$ のとき 実数 a,b について $\|a\|\|b\|=\|ab\|$ は自明 //

$n=2$ のとき 複素数 $a=a_1+a_2i$, $b=b_1+b_2i$ （$a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathrm{R}$）について、

$|a|^2|b|^2=|ab|^2$ を示す。

左辺：$|a|^2|b|^2=(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)=a_1{}^2b_1{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2$

右辺：$|ab|^2=|a_1b_1+a_1b_2i+a_2b_1i+a_2b_2i^2|^2=|a_1b_1-a_2b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i|^2$

$=(\boldsymbol{a_1b_1-a_2b_2})^2+(\boldsymbol{a_1b_2+a_2b_1})^2=a_1{}^2b_1{}^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2{}^2b_2{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2{}^2b_1{}^2$

$=a_1{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2$ //（証明終わり）

$n=4$ のとき 四元数 $a=a_1+a_2i+a_3j+a_4k$, $b=b_1+b_2i+b_3j+b_4k$ （$a_1,\cdot\cdot a_4,b_1,\cdot\cdot b_4\in\mathrm{R}$）

について、$|a|^2|b|^2=|ab|^2$ を示す。

左辺：$|a|^2|b|^2=(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2)=a_1{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2)$
$+a_2{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2)+a_3{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2)+a_4{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2)$

$=a_1{}^2b_1{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_1{}^2b_3{}^2+a_1{}^2b_4{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_3{}^2+a_2{}^2b_4{}^2$
$+a_3{}^2b_1{}^2+a_3{}^2b_2{}^2+a_3{}^2b_3{}^2+a_3{}^2b_4{}^2+a_4{}^2b_1{}^2+a_4{}^2b_2{}^2+a_4{}^2b_3{}^2+a_4{}^2b_4{}^2$

右辺：$|ab|^2=|(a_1+a_2i+a_3j+a_4k)(b_1+b_2i+b_3j+b_4k)|^2$

$=|a_1(b_1+b_2i+b_3j+b_4k)+a_2i(b_1+b_2i+b_3j+b_4k)+a_3j(b_1+b_2i+b_3j+b_4k)$
$+a_4k(b_1+b_2i+b_3j+b_4k)|^2$

$=|a_1b_1+a_1b_2i+a_1b_3j+a_1b_4k+a_2b_1i+a_2b_2ii+a_2b_3ij+a_2b_4ik$
$+a_3b_1j+a_3b_2ji+a_3b_3jj+a_3b_4jk+a_4b_1k+a_4b_2ki+a_4b_3kj+a_4b_4kk|^2$

$$
\begin{aligned}
&=|a_1b_1+a_1b_2i+a_1b_3j+a_1b_4k+a_2b_1i-a_2b_2+a_2b_3k-a_2b_4j\\
&\quad +a_3b_1j-a_3b_2k-a_3b_3+a_3b_4i+a_4b_1k+a_4b_2j-a_4b_3i-a_4b_4|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=|a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4+a_1b_2i+a_2b_1i+a_3b_4i-a_4b_3i+a_1b_3j-a_2b_4j\\
&\quad +a_3b_1j+a_4b_2j+a_1b_4k+a_2b_3k-a_3b_2k+a_4b_1k|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=|a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)i\\
&\quad +(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)j+(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)k|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\boldsymbol{(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)^2+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2}\\
&\quad \boldsymbol{+(a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2)^2+(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2+(a_3b_3)^2+(a_4b_4)^2-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-2a_1b_1a_4b_4\\
&\quad +2a_2b_2a_3b_3+2a_2b_2a_4b_4+2a_3b_3a_4b_4+(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2+(a_3b_4)^2+(a_4b_3)^2\\
&\quad +2a_1b_2a_2b_1+2a_1b_2a_3b_4-2a_1b_2a_4b_3+2a_2b_1a_3b_4-2a_2b_1a_4b_3-2a_3b_4a_4b_3\\
&\quad +(a_1b_3)^2+(a_3b_1)^2+(a_2b_4)^2+(a_4b_2)^2-2a_1b_3a_2b_4+2a_1b_3a_3b_1\\
&\quad +2a_1b_3a_4b_2-2a_2b_4a_3b_1-2a_2b_4a_4b_2+2a_3b_1a_4b_2\\
&\quad +(a_1b_4)^2+(a_2b_3)^2+(a_3b_2)^2+(a_4b_1)^2+2a_1b_4a_2b_3-2a_1b_4a_3b_2\\
&\quad +2a_1b_4a_4b_1-2a_2b_3a_3b_2+2a_2b_3a_4b_1-2a_3b_2a_4b_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2+(a_3b_3)^2+(a_4b_4)^2+(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2+(a_3b_4)^2+(a_4b_3)^2\\
&\quad +(a_1b_3)^2+(a_3b_1)^2+(a_2b_4)^2+(a_4b_2)^2+(a_1b_4)^2+(a_2b_3)^2+(a_3b_2)^2+(a_4b_1)^2\\
&\quad -2a_1b_1a_2b_2+2a_1b_2a_2b_1-2a_1b_1a_3b_3+2a_1b_3a_3b_1-2a_1b_1a_4b_4+2a_1b_4a_4b_1\\
&\quad +2a_2b_2a_3b_3-2a_2b_3a_3b_2+2a_2b_2a_4b_4-2a_2b_4a_4b_2+2a_3b_3a_4b_4-2a_3b_4a_4b_3\\
&\quad +2a_1b_2a_3b_4-2a_1b_4a_3b_2+2a_2b_1a_3b_4-2a_2b_4a_3b_1-2a_2b_1a_4b_3+2a_2b_3a_4b_1\\
&\quad -2a_1b_3a_2b_4+2a_1b_4a_2b_3+2a_1b_3a_4b_2-2a_1b_2a_4b_3+2a_3b_1a_4b_2-2a_3b_2a_4b_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2+(a_3b_3)^2+(a_4b_4)^2+(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2+(a_3b_4)^2+(a_4b_3)^2\\
&\quad +(a_1b_3)^2+(a_3b_1)^2+(a_2b_4)^2+(a_4b_2)^2+(a_1b_4)^2+(a_2b_3)^2+(a_3b_2)^2+(a_4b_1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=a_1{}^2b_1{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_1{}^2b_3{}^2+a_1{}^2b_4{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_3{}^2+a_2{}^2b_4{}^2\\
&\quad +a_3{}^2b_1{}^2+a_3{}^2b_2{}^2+a_3{}^2b_3{}^2+a_3{}^2b_4{}^2+a_4{}^2b_1{}^2+a_4{}^2b_2{}^2+a_4{}^2b_3{}^2+a_4{}^2b_4{}^2
\end{aligned}
$$

//(証明終わり)

ただし、掛け算において非可換であるため、純虚数（ i,j,k ）は以下のルールに従った。

$\boldsymbol{i^2=j^2=k^2=ijk=-1}$　　すなわち、右表である。

例えば、　$\boldsymbol{ij=k}$

左＼右	i	$\boldsymbol{j}$	k
$\boldsymbol{i}$	-1	$\boldsymbol{k}$	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

ちなみに、☆を満たすことは右辺の**途中式に明らか**であるが、以下でも示される。

$n=2$ のとき　$a_1{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2=\boldsymbol{(a_1b_1+a_2b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}=c_1{}^2+c_2{}^2$

$n=4$ のとき　$a_1{}^2b_1{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_1{}^2b_3{}^2+a_1{}^2b_4{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_3{}^2+a_2{}^2b_4{}^2$
$+a_3{}^2b_1{}^2+a_3{}^2b_2{}^2+a_3{}^2b_3{}^2+a_3{}^2b_4{}^2+a_4{}^2b_1{}^2+a_4{}^2b_2{}^2+a_4{}^2b_3{}^2+a_4{}^2b_4{}^2$

$$=(a_1b_1+a_4b_4)^2+(a_1b_4-a_4b_1)^2+(a_1b_2+a_4b_3)^2+(a_4b_2-a_1b_3)^2$$
$$+(a_2b_2+a_3b_3)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_2b_1+a_3b_4)^2+(a_2b_4-a_3b_1)^2$$

$=c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2+c_4{}^2$　とできる。（∵ オイラーの4平方恒等式の解。）

（∵
$$(a_1b_1+a_4b_4)^2+(a_1b_4-a_4b_1)^2+(a_1b_2+a_4b_3)^2+(a_4b_2-a_1b_3)^2$$
$$+(a_2b_2+a_3b_3)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_2b_1+a_3b_4)^2+(a_2b_4-a_3b_1)^2$$
$$=(a_1b_1+a_4b_4)^2+(a_2b_2+a_3b_3)^2+(a_1b_2+a_4b_3)^2+(a_2b_1+a_3b_4)^2$$
$$+(a_4b_2-a_1b_3)^2+(a_2b_4-a_3b_1)^2+(a_1b_4-a_4b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2$$

$$=\boldsymbol{(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2+(a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2}$$
$$\boldsymbol{+(a_1b_3-a_2b_4-a_3b_1+a_4b_2)^2+(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2-a_4b_1)^2}\qquad /\!/\ )$$

展開して確かめたほうが早い！

考察・探究はまだまだ続く・・・・・・・・　　　　2026.1.3　自宅にて

$n=8$ のとき 八元数 $a=a_1+a_2i+a_3j+a_4k+a_5l+a_6m+a_7n+a_8o$,
$b=b_1+b_2i+b_3j+b_4k+b_5l+b_6m+b_7n+b_8o$　$(a_1,\cdots a_8,b_1,\cdots b_8\in\mathrm{R})$

について、$|a|^2|b|^2=|ab|^2$　を示したい。

左辺：$|a|^2|b|^2=(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2+a_6{}^2+a_7{}^2+a_8{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2$
$$+b_5{}^2+b_6{}^2+b_7{}^2+b_8{}^2)=a_1{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2+b_5{}^2+b_6{}^2+b_7{}^2+b_8{}^2)$$
$$+a_2{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2+b_5{}^2+b_6{}^2+b_7{}^2+b_8{}^2)+a_3{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2$$
$$+b_5{}^2+b_6{}^2+b_7{}^2+b_8{}^2)+a_4{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2+b_5{}^2+b_6{}^2+b_7{}^2+b_8{}^2)$$
$$+a_5{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2+b_5{}^2+b_6{}^2+b_7{}^2+b_8{}^2)+a_6{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2$$
$$+b_5{}^2+b_6{}^2+b_7{}^2+b_8{}^2)+a_7{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2+b_5{}^2+b_6{}^2+b_7{}^2+b_8{}^2)$$
$$+a_8{}^2(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+b_4{}^2+b_5{}^2+b_6{}^2+b_7{}^2+b_8{}^2)$$
$$=a_1{}^2b_1{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_1{}^2b_3{}^2+a_1{}^2b_4{}^2+a_1{}^2b_5{}^2+a_1{}^2b_6{}^2+a_1{}^2b_7{}^2+a_1{}^2b_8{}^2$$
$$+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_3{}^2+a_2{}^2b_4{}^2+a_2{}^2b_5{}^2+a_2{}^2b_6{}^2+a_2{}^2b_7{}^2+a_2{}^2b_8{}^2$$
$$+a_3{}^2b_1{}^2+a_3{}^2b_2{}^2+a_3{}^2b_3{}^2+a_3{}^2b_4{}^2+a_3{}^2b_5{}^2+a_3{}^2b_6{}^2+a_3{}^2b_7{}^2+a_3{}^2b_8{}^2$$
$$+a_4{}^2b_1{}^2+a_4{}^2b_2{}^2+a_4{}^2b_3{}^2+a_4{}^2b_4{}^2+a_4{}^2b_5{}^2+a_4{}^2b_6{}^2+a_4{}^2b_7{}^2+a_4{}^2b_8{}^2$$
$$+a_5{}^2b_1{}^2+a_5{}^2b_2{}^2+a_5{}^2b_3{}^2+a_5{}^2b_4{}^2+a_5{}^2b_5{}^2+a_5{}^2b_6{}^2+a_5{}^2b_7{}^2+a_5{}^2b_8{}^2$$
$$+a_6{}^2b_1{}^2+a_6{}^2b_2{}^2+a_6{}^2b_3{}^2+a_6{}^2b_4{}^2+a_6{}^2b_5{}^2+a_6{}^2b_6{}^2+a_6{}^2b_7{}^2+a_6{}^2b_8{}^2$$
$$+a_7{}^2b_1{}^2+a_7{}^2b_2{}^2+a_7{}^2b_3{}^2+a_7{}^2b_4{}^2+a_7{}^2b_5{}^2+a_7{}^2b_6{}^2+a_7{}^2b_7{}^2+a_7{}^2b_8{}^2$$
$$+a_8{}^2b_1{}^2+a_8{}^2b_2{}^2+a_8{}^2b_3{}^2+a_8{}^2b_4{}^2+a_8{}^2b_5{}^2+a_8{}^2b_6{}^2+a_8{}^2b_7{}^2+a_8{}^2b_8{}^2$$

右辺：$|ab|^2=|\,(a_1+a_2i+a_3j+a_4k+a_5l+a_6m+a_7n+a_8o)(b_1+b_2i+b_3j+b_4k$
$$+b_5l+b_6m+b_7n+b_8o)\,|^2$$

$$=|a_1(b_1+b_2i+b_3j+b_4k+b_5l+b_6m+b_7n+b_8o)+a_2i(b_1+b_2i+b_3j+b_4k$$
$$+b_5l+b_6m+b_7n+b_8o)+a_3j(b_1+b_2i+b_3j+b_4k+b_5l+b_6m+b_7n+b_8o)$$
$$+a_4k(b_1+b_2i+b_3j+b_4k+b_5l+b_6m+b_7n+b_8o)+a_5l(b_1+b_2i+b_3j+b_4k$$
$$+b_5l+b_6m+b_7n+b_8o)+a_6m(b_1+b_2i+b_3j+b_4k+b_5l+b_6m+b_7n+b_8o)$$
$$+a_7n(b_1+b_2i+b_3j+b_4k+b_5l+b_6m+b_7n+b_8o)+a_8o(b_1+b_2i+b_3j+b_4k$$
$$+b_5l+b_6m+b_7n+b_8o)\,|^2$$

$$
\begin{aligned}
=|&a_1b_1+a_1b_2i+a_1b_3j+a_1b_4k+a_1b_5l+a_1b_6m+a_1b_7n+a_1b_8o+a_2b_1i+a_2b_2ii\\
&+a_2b_3ij+a_2b_4ik+a_2b_5il+a_2b_6im+a_2b_7in+a_2b_8io+a_3b_1j+a_3b_2ji+a_3b_3jj\\
&+a_3b_4jk+a_3b_5jl+a_3b_6jm+a_3b_7jn+a_3b_8jo+a_4b_1k+a_4b_2ki+a_4b_3kj\\
&+a_4b_4kk+a_4b_5kl+a_4b_6km+a_4b_7kn+a_4b_8ko+a_5b_1l+a_5b_2li+a_5b_3lj\\
&+a_5b_4lk+a_5b_5ll+a_5b_6lm+a_5b_7ln+a_5b_8lo+a_6b_1m+a_6b_2mi+a_6b_3mj\\
&+a_6b_4mk+a_6b_5ml+a_6b_6mm+a_6b_7mn+a_6b_8mo+a_7b_1n+a_7b_2ni+a_7b_3nj\\
&+a_7b_4nk+a_7b_5nl+a_7b_6nm+a_7b_7nn+a_7b_8no+a_8b_1o+a_8b_2oi+a_8b_3oj\\
&+a_8b_4ok+a_8b_5ol+a_8b_6om+a_8b_7on+a_8b_8oo\,|^2
\end{aligned}
$$

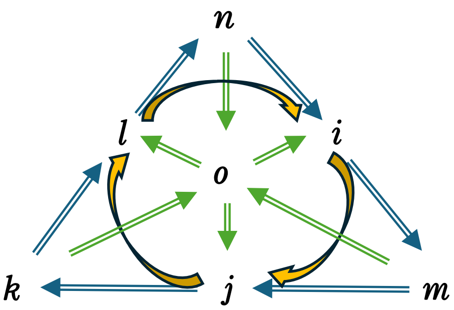
（掛け算における非可換ルールに従って、純虚数（ $\boldsymbol{i,j,k,l,m,n,o}$ ）は以下になる。）

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{i^2=j^2=k^2=l^2=m^2=n^2=o^2=-1}\\
&\boldsymbol{ijl=nim=mjk=kln=noj=koi=mol=-1}
\end{aligned}
$$

を満たす。

上手（うま）くまとめると、下図（Fano 平面）になる。例えば、$\boldsymbol{ij=l\,,\,im=n\,,\,\cdots}$

矢印 $\Rightarrow$ が正（＋）の向き、逆向きは負（—）になる。



よって、右辺の続きは

右辺：$|ab|^2=|a_1b_1+a_1b_2i+a_1b_3j+a_1b_4k+a_1b_5l+a_1b_6m+a_1b_7n+a_1b_8o+a_2b_1i+a_2b_2ii$

$$
\begin{aligned}
&+a_2b_3ij+a_2b_4ik+a_2b_5il+a_2b_6im+a_2b_7in+a_2b_8io+a_3b_1j+a_3b_2ji+a_3b_3jj\\
&+a_3b_4jk+a_3b_5jl+a_3b_6jm+a_3b_7jn+a_3b_8jo+a_4b_1k+a_4b_2ki+a_4b_3kj\\
&+a_4b_4kk+a_4b_5kl+a_4b_6km+a_4b_7kn+a_4b_8ko+a_5b_1l+a_5b_2li+a_5b_3lj\\
&+a_5b_4lk+a_5b_5ll+a_5b_6lm+a_5b_7ln+a_5b_8lo+a_6b_1m+a_6b_2mi+a_6b_3mj\\
&+a_6b_4mk+a_6b_5ml+a_6b_6mm+a_6b_7mn+a_6b_8mo+a_7b_1n+a_7b_2ni+a_7b_3nj\\
&+a_7b_4nk+a_7b_5nl+a_7b_6nm+a_7b_7nn+a_7b_8no+a_8b_1o+a_8b_2oi+a_8b_3oj\\
&+a_8b_4ok+a_8b_5ol+a_8b_6om+a_8b_7on+a_8b_8oo\,|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=|&a_1b_1+a_1b_2i+a_1b_3j+a_1b_4k+a_1b_5l+a_1b_6m+a_1b_7n+a_1b_8o+a_2b_1i-a_2b_2\\
&+a_2b_3l+a_2b_4o-a_2b_5j+a_2b_6n-a_2b_7m-a_2b_8k+a_3b_1j-a_3b_2l-a_3b_3\\
&+a_3b_4m+a_3b_5i-a_3b_6k+a_3b_7o-a_3b_8n+a_4b_1k-a_4b_2o-a_4b_3m\\
&-a_4b_4+a_4b_5n+a_4b_6j-a_4b_7l+a_4b_8i+a_5b_1l+a_5b_2j-a_5b_3i\\
&-a_5b_4n-a_5b_5+a_5b_6o+a_5b_7k-a_5b_8m+a_6b_1m-a_6b_2n+a_6b_3k\\
&-a_6b_4j-a_6b_5o-a_6b_6+a_6b_7i+a_6b_8l+a_7b_1n+a_7b_2m-a_7b_3o\\
&+a_7b_4l-a_7b_5k-a_7b_6i-a_7b_7+a_7b_8j+a_8b_1o+a_8b_2k+a_8b_3n\\
&-a_8b_4i+a_8b_5m-a_8b_6l-a_8b_7j-a_8b_8\,|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=|&a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4-a_5b_5-a_6b_6-a_7b_7-a_8b_8\\
&+a_1b_2i+a_2b_1i+a_3b_5i+a_4b_8i-a_5b_3i+a_6b_7i-a_7b_6i-a_8b_4i\\
&+a_1b_3j-a_2b_5j+a_3b_1j+a_4b_6j+a_5b_2j-a_6b_4j+a_7b_8j-a_8b_7j\\
&+a_1b_4k-a_2b_8k-a_3b_6k+a_4b_1k+a_5b_7k+a_6b_3k-a_7b_5k+a_8b_2k\\
&+a_1b_5l+a_2b_3l-a_3b_2l-a_4b_7l+a_5b_1l+a_6b_8l+a_7b_4l-a_8b_6l\\
&+a_1b_6m-a_2b_7m+a_3b_4m-a_4b_3m-a_5b_8m+a_6b_1m+a_7b_2m+a_8b_5m\\
&+a_1b_7n+a_2b_6n-a_3b_8n+a_4b_5n-a_5b_4n-a_6b_2n+a_7b_1n+a_8b_3n\\
&+a_1b_8o+a_2b_4o+a_3b_7o-a_4b_2o+a_5b_6o-a_6b_5o-a_7b_3o+a_8b_1o\,|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=|&(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4-a_5b_5-a_6b_6-a_7b_7-a_8b_8)\\
&+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_5+a_4b_8-a_5b_3+a_6b_7-a_7b_6-a_8b_4)i\\
&+(a_1b_3-a_2b_5+a_3b_1+a_4b_6+a_5b_2-a_6b_4+a_7b_8-a_8b_7)j\\
&+(a_1b_4-a_2b_8-a_3b_6+a_4b_1+a_5b_7+a_6b_3-a_7b_5+a_8b_2)k\\
&+(a_1b_5+a_2b_3-a_3b_2-a_4b_7+a_5b_1+a_6b_8+a_7b_4-a_8b_6)l\\
&+(a_1b_6-a_2b_7+a_3b_4-a_4b_3-a_5b_8+a_6b_1+a_7b_2+a_8b_5)m\\
&+(a_1b_7+a_2b_6-a_3b_8+a_4b_5-a_5b_4-a_6b_2+a_7b_1+a_8b_3)n\\
&+(a_1b_8+a_2b_4+a_3b_7-a_4b_2+a_5b_6-a_6b_5-a_7b_3+a_8b_1)o\,|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4-a_5b_5-a_6b_6-a_7b_7-a_8b_8)^2\\
&+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_5+a_4b_8-a_5b_3+a_6b_7-a_7b_6-a_8b_4)^2\\
&+(a_1b_3-a_2b_5+a_3b_1+a_4b_6+a_5b_2-a_6b_4+a_7b_8-a_8b_7)^2\\
&+(a_1b_4-a_2b_8-a_3b_6+a_4b_1+a_5b_7+a_6b_3-a_7b_5+a_8b_2)^2\\
&+(a_1b_5+a_2b_3-a_3b_2-a_4b_7+a_5b_1+a_6b_8+a_7b_4-a_8b_6)^2\\
&+(a_1b_6-a_2b_7+a_3b_4-a_4b_3-a_5b_8+a_6b_1+a_7b_2+a_8b_5)^2\\
&+(a_1b_7+a_2b_6-a_3b_8+a_4b_5-a_5b_4-a_6b_2+a_7b_1+a_8b_3)^2\\
&+(a_1b_8+a_2b_4+a_3b_7-a_4b_2+a_5b_6-a_6b_5-a_7b_3+a_8b_1)^2
\end{aligned}
$$

・・・右辺の☆は示された//

$$
\begin{aligned}
=&(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2+(a_3b_3)^2+(a_4b_4)^2+(a_5b_5)^2+(a_6b_6)^2+(a_7b_7)^2+(a_8b_8)^2\\
&-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-2a_1b_1a_4b_4-2a_1b_1a_5b_5-2a_1b_1a_6b_6-2a_1b_1a_7b_7-2a_1b_1a_8b_8\\
&+2a_2b_2a_3b_3+2a_2b_2a_4b_4+2a_2b_2a_5b_5+2a_2b_2a_6b_6+2a_2b_2a_7b_7+2a_2b_2a_8b_8\\
&+2a_3b_3a_4b_4+2a_3b_3a_5b_5+2a_3b_3a_6b_6+2a_3b_3a_7b_7+2a_3b_3a_8b_8\\
&+2a_4b_4a_5b_5+2a_4b_4a_6b_6+2a_4b_4a_7b_7+2a_4b_4a_8b_8\\
&+2a_5b_5a_6b_6+2a_5b_5a_7b_7+2a_5b_5a_8b_8+2a_6b_6a_7b_7+2a_6b_6a_8b_8+2a_7b_7a_8b_8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2+(a_3b_5)^2+(a_4b_8)^2+(a_5b_3)^2+(a_6b_7)^2+(a_7b_6)^2+(a_8b_4)^2\\
&+2a_1b_2a_2b_1+2a_1b_2a_3b_5+2a_1b_2a_4b_8-2a_1b_2a_5b_3+2a_1b_2a_6b_7-2a_1b_2a_7b_6-2a_1b_2a_8b_4\\
&+2a_2b_1a_3b_5+2a_2b_1a_4b_8-2a_2b_1a_5b_3+2a_2b_1a_6b_7-2a_2b_1a_7b_6-2a_2b_1a_8b_4\\
&+2a_3b_5a_4b_8-2a_3b_5a_5b_3+2a_3b_5a_6b_7-2a_3b_5a_7b_6-2a_3b_5a_8b_4\\
&-2a_4b_8a_5b_3+2a_4b_8a_6b_7-2a_4b_8a_7b_6-2a_4b_8a_8b_4\\
&-2a_5b_3a_6b_7+2a_5b_3a_7b_6+2a_5b_3a_8b_4-2a_6b_7a_7b_6-2a_6b_7a_8b_4+2a_7b_6a_8b_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(a_1b_3)^2+(a_2b_5)^2+(a_3b_1)^2+(a_4b_6)^2+(a_5b_2)^2+(a_6b_4)^2+(a_7b_8)^2+(a_8b_7)^2\\
&-2a_1b_3a_2b_5+2a_1b_3a_3b_1+2a_1b_3a_4b_6+2a_1b_3a_5b_2-2a_1b_3a_6b_4+2a_1b_3a_7b_8-2a_1b_3a_8b_7\\
&-2a_2b_5a_3b_1-2a_2b_5a_4b_6-2a_2b_5a_5b_2+2a_2b_5a_6b_4-2a_2b_5a_7b_8+2a_2b_5a_8b_7\\
&+2a_3b_1a_4b_6+2a_3b_1a_5b_2-2a_3b_1a_6b_4+2a_3b_1a_7b_8-2a_3b_1a_8b_7\\
&+2a_4b_6a_5b_2-2a_4b_6a_6b_4+2a_4b_6a_7b_8-2a_4b_6a_8b_7\\
&-2a_5b_2a_6b_4+2a_5b_2a_7b_8-2a_5b_2a_8b_7-2a_6b_4a_7b_8+2a_6b_4a_8b_7-2a_7b_8a_8b_7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(a_1b_4)^2+(a_2b_8)^2+(a_3b_6)^2+(a_4b_1)^2+(a_5b_7)^2+(a_6b_3)^2+(a_7b_5)^2+(a_8b_2)^2\\
&-2a_1b_4a_2b_8-2a_1b_4a_3b_6+2a_1b_4a_4b_1+2a_1b_4a_5b_7+2a_1b_4a_6b_3-2a_1b_4a_7b_5+2a_1b_4a_8b_2\\
&+2a_2b_8a_3b_6-2a_2b_8a_4b_1-2a_2b_8a_5b_7-2a_2b_8a_6b_3+2a_2b_8a_7b_5-2a_2b_8a_8b_2\\
&-2a_3b_6a_4b_1-2a_3b_6a_5b_7-2a_3b_6a_6b_3+2a_3b_6a_7b_5-2a_3b_6a_8b_2\\
&+2a_4b_1a_5b_7+2a_4b_1a_6b_3-2a_4b_1a_7b_5+2a_4b_1a_8b_2\\
&+2a_5b_7a_6b_3-2a_5b_7a_7b_5+2a_5b_7a_8b_2-2a_6b_3a_7b_5+2a_6b_3a_8b_2-2a_7b_5a_8b_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(a_1b_5)^2+(a_2b_3)^2+(a_3b_2)^2+(a_4b_7)^2+(a_5b_1)^2+(a_6b_8)^2+(a_7b_4)^2+(a_8b_6)^2\\
&+2a_1b_5a_2b_3-2a_1b_5a_3b_2-2a_1b_5a_4b_7+2a_1b_5a_5b_1+2a_1b_5a_6b_8+2a_1b_5a_7b_4-2a_1b_5a_8b_6\\
&-2a_2b_3a_3b_2-2a_2b_3a_4b_7+2a_2b_3a_5b_1+2a_2b_3a_6b_8+2a_2b_3a_7b_4-2a_2b_3a_8b_6\\
&+2a_3b_2a_4b_7-2a_3b_2a_5b_1-2a_3b_2a_6b_8-2a_3b_2a_7b_4+2a_3b_2a_8b_6\\
&-2a_4b_7a_5b_1-2a_4b_7a_6b_8-2a_4b_7a_7b_4+2a_4b_7a_8b_6\\
&+2a_5b_1a_6b_8+2a_5b_1a_7b_4-2a_5b_1a_8b_6+2a_6b_8a_7b_4-2a_6b_8a_8b_6-2a_7b_4a_8b_6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(a_1b_6)^2+(a_2b_7)^2+(a_3b_4)^2+(a_4b_3)^2+(a_5b_8)^2+(a_6b_1)^2+(a_7b_2)^2+(a_8b_5)^2\\
&-2a_1b_6a_2b_7+2a_1b_6a_3b_4-2a_1b_6a_4b_3-2a_1b_6a_5b_8+2a_1b_6a_6b_1+2a_1b_6a_7b_2+2a_1b_6a_8b_5\\
&-2a_2b_7a_3b_4+2a_2b_7a_4b_3+2a_2b_7a_5b_8-2a_2b_7a_6b_1-2a_2b_7a_7b_2-2a_2b_7a_8b_5\\
&-2a_3b_4a_4b_3-2a_3b_4a_5b_8+2a_3b_4a_6b_1+2a_3b_4a_7b_2+2a_3b_4a_8b_5\\
&+2a_4b_3a_5b_8-2a_4b_3a_6b_1-2a_4b_3a_7b_2-2a_4b_3a_8b_5\\
&-2a_5b_8a_6b_1-2a_5b_8a_7b_2-2a_5b_8a_8b_5+2a_6b_1a_7b_2+2a_6b_1a_8b_5+2a_7b_2a_8b_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(a_1b_7)^2+(a_2b_6)^2+(a_3b_8)^2+(a_4b_5)^2+(a_5b_4)^2+(a_6b_2)^2+(a_7b_1)^2+(a_8b_3)^2\\
&+2a_1b_7a_2b_6-2a_1b_7a_3b_8+2a_1b_7a_4b_5-2a_1b_7a_5b_4-2a_1b_7a_6b_2+2a_1b_7a_7b_1+2a_1b_7a_8b_3\\
&-2a_2b_6a_3b_8+2a_2b_6a_4b_5-2a_2b_6a_5b_1-2a_2b_6a_6b_2+2a_2b_6a_7b_1+2a_2b_6a_8b_3\\
&-2a_3b_8a_4b_5+2a_3b_8a_5b_4+2a_3b_8a_6b_2-2a_3b_8a_7b_1-2a_3b_8a_8b_3\\
&-2a_4b_5a_5b_4-2a_4b_5a_6b_2+2a_4b_5a_7b_1+2a_4b_5a_8b_3\\
&+2a_5b_4a_6b_2-2a_5b_4a_7b_1-2a_5b_4a_8b_3-2a_6b_2a_7b_1-2a_6b_2a_8b_3+2a_7b_1a_8b_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(a_1b_8)^2+(a_2b_4)^2+(a_3b_7)^2+(a_4b_2)^2+(a_5b_6)^2+(a_6b_5)^2+(a_7b_3)^2+(a_8b_1)^2\\
&+2a_1b_8a_2b_4+2a_1b_8a_3b_7-2a_1b_8a_4b_2+2a_1b_8a_5b_6-2a_1b_8a_6b_5-2a_1b_8a_7b_3+2a_1b_8a_8b_1\\
&+2a_2b_4a_3b_7-2a_2b_4a_4b_2+2a_2b_4a_5b_6-2a_2b_4a_6b_5-2a_2b_4a_7b_3+2a_2b_4a_8b_1\\
&-2a_3b_7a_4b_2+2a_3b_7a_5b_6-2a_3b_7a_6b_5-2a_3b_7a_7b_3+2a_3b_7a_8b_1\\
&-2a_4b_2a_5b_6+2a_4b_2a_6b_5+2a_4b_2a_7b_3-2a_4b_2a_8b_1\\
&-2a_5b_6a_6b_5-2a_5b_6a_7b_3+2a_5b_6a_8b_1+2a_6b_5a_7b_3-2a_6b_5a_8b_1-2a_7b_3a_8b_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2+(a_3b_3)^2+(a_4b_4)^2+(a_5b_5)^2+(a_6b_6)^2+(a_7b_7)^2+(a_8b_8)^2\\
&+(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2+(a_3b_5)^2+(a_4b_8)^2+(a_5b_3)^2+(a_6b_7)^2+(a_7b_6)^2+(a_8b_4)^2\\
&+(a_1b_3)^2+(a_2b_5)^2+(a_3b_1)^2+(a_4b_6)^2+(a_5b_2)^2+(a_6b_4)^2+(a_7b_8)^2+(a_8b_7)^2\\
&+(a_1b_4)^2+(a_2b_8)^2+(a_3b_6)^2+(a_4b_1)^2+(a_5b_7)^2+(a_6b_3)^2+(a_7b_5)^2+(a_8b_2)^2\\
&+(a_1b_5)^2+(a_2b_3)^2+(a_3b_2)^2+(a_4b_7)^2+(a_5b_1)^2+(a_6b_8)^2+(a_7b_4)^2+(a_8b_6)^2\\
&+(a_1b_6)^2+(a_2b_7)^2+(a_3b_4)^2+(a_4b_3)^2+(a_5b_8)^2+(a_6b_1)^2+(a_7b_2)^2+(a_8b_5)^2\\
&+(a_1b_7)^2+(a_2b_6)^2+(a_3b_8)^2+(a_4b_5)^2+(a_5b_4)^2+(a_6b_2)^2+(a_7b_1)^2+(a_8b_3)^2\\
&+(a_1b_8)^2+(a_2b_4)^2+(a_3b_7)^2+(a_4b_2)^2+(a_5b_6)^2+(a_6b_5)^2+(a_7b_3)^2+(a_8b_1)^2\\
&-2a_1b_1a_2b_2-2a_1b_1a_3b_3-2a_1b_1a_4b_4-2a_1b_1a_5b_5-2a_1b_1a_6b_6-2a_1b_1a_7b_7-2a_1b_1a_8b_8\\
&+2a_2b_2a_3b_3+2a_2b_2a_4b_4+2a_2b_2a_5b_5+2a_2b_2a_6b_6+2a_2b_2a_7b_7+2a_2b_2a_8b_8\\
&+2a_3b_3a_4b_4+2a_3b_3a_5b_5+2a_3b_3a_6b_6+2a_3b_3a_7b_7+2a_3b_3a_8b_8\\
&+2a_4b_4a_5b_5+2a_4b_4a_6b_6+2a_4b_4a_7b_7+2a_4b_4a_8b_8\\
&+2a_5b_5a_6b_6+2a_5b_5a_7b_7+2a_5b_5a_8b_8+2a_6b_6a_7b_7+2a_6b_6a_8b_8+2a_7b_7a_8b_8\\
&+2a_1b_2a_2b_1+2a_1b_2a_3b_5+2a_1b_2a_4b_8-2a_1b_2a_5b_3+2a_1b_2a_6b_7-2a_1b_2a_7b_6-2a_1b_2a_8b_4\\
&+2a_2b_1a_3b_5+2a_2b_1a_4b_8-2a_2b_1a_5b_3+2a_2b_1a_6b_7-2a_2b_1a_7b_6-2a_2b_1a_8b_4\\
&+2a_3b_5a_4b_8-2a_3b_5a_5b_3+2a_3b_5a_6b_7-2a_3b_5a_7b_6-2a_3b_5a_8b_4\\
&-2a_4b_8a_5b_3+2a_4b_8a_6b_7-2a_4b_8a_7b_6-2a_4b_8a_8b_4\\
&-2a_5b_3a_6b_7+2a_5b_3a_7b_6+2a_5b_3a_8b_4-2a_6b_7a_7b_6-2a_6b_7a_8b_4+2a_7b_6a_8b_4\\
&-2a_1b_3a_2b_5+2a_1b_3a_3b_1+2a_1b_3a_4b_6+2a_1b_3a_5b_2-2a_1b_3a_6b_4+2a_1b_3a_7b_8-2a_1b_3a_8b_7\\
&-2a_2b_5a_3b_1-2a_2b_5a_4b_6-2a_2b_5a_5b_2+2a_2b_5a_6b_4-2a_2b_5a_7b_8+2a_2b_5a_8b_7\\
&+2a_3b_1a_4b_6+2a_3b_1a_5b_2-2a_3b_1a_6b_4+2a_3b_1a_7b_8-2a_3b_1a_8b_7\\
&+2a_4b_6a_5b_2-2a_4b_6a_6b_4+2a_4b_6a_7b_8-2a_4b_6a_8b_7\\
&-2a_5b_2a_6b_4+2a_5b_2a_7b_8-2a_5b_2a_8b_7-2a_6b_4a_7b_8+2a_6b_4a_8b_7-2a_7b_8a_8b_7\\
&-2a_1b_4a_2b_8-2a_1b_4a_3b_6+2a_1b_4a_4b_1+2a_1b_4a_5b_7+2a_1b_4a_6b_3-2a_1b_4a_7b_5+2a_1b_4a_8b_2\\
&+2a_2b_8a_3b_6-2a_2b_8a_4b_1-2a_2b_8a_5b_7-2a_2b_8a_6b_3+2a_2b_8a_7b_5-2a_2b_8a_8b_2\\
&-2a_3b_6a_4b_1-2a_3b_6a_5b_7-2a_3b_6a_6b_3+2a_3b_6a_7b_5-2a_3b_6a_8b_2\\
&+2a_4b_1a_5b_7+2a_4b_1a_6b_3-2a_4b_1a_7b_5+2a_4b_1a_8b_2\\
&+2a_5b_7a_6b_3-2a_5b_7a_7b_5+2a_5b_7a_8b_2-2a_6b_3a_7b_5+2a_6b_3a_8b_2-2a_7b_5a_8b_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2a_1b_5a_2b_3-2a_1b_5a_3b_2-2a_1b_5a_4b_7+2a_1b_5a_5b_1+2a_1b_5a_6b_8+2a_1b_5a_7b_4-2a_1b_5a_8b_6\\
&-2a_2b_3a_3b_2-2a_2b_3a_4b_7+2a_2b_3a_5b_1+2a_2b_3a_6b_8+2a_2b_3a_7b_4-2a_2b_3a_8b_6\\
&+2a_3b_2a_4b_7-2a_3b_2a_5b_1-2a_3b_2a_6b_8-2a_3b_2a_7b_4+2a_3b_2a_8b_6\\
&-2a_4b_7a_5b_1-2a_4b_7a_6b_8-2a_4b_7a_7b_4+2a_4b_7a_8b_6\\
&+2a_5b_1a_6b_8+2a_5b_1a_7b_4-2a_5b_1a_8b_6+2a_6b_8a_7b_4-2a_6b_8a_8b_6-2a_7b_4a_8b_6\\
&-2a_1b_6a_2b_7+2a_1b_6a_3b_4-2a_1b_6a_4b_3-2a_1b_6a_5b_8+2a_1b_6a_6b_1+2a_1b_6a_7b_2+2a_1b_6a_8b_5\\
&-2a_2b_7a_3b_4+2a_2b_7a_4b_3+2a_2b_7a_5b_8-2a_2b_7a_6b_1-2a_2b_7a_7b_2-2a_2b_7a_8b_5\\
&-2a_3b_4a_4b_3-2a_3b_4a_5b_8+2a_3b_4a_6b_1+2a_3b_4a_7b_2+2a_3b_4a_8b_5\\
&+2a_4b_3a_5b_8-2a_4b_3a_6b_1-2a_4b_3a_7b_2-2a_4b_3a_8b_5\\
&-2a_5b_8a_6b_1-2a_5b_8a_7b_2-2a_5b_8a_8b_5+2a_6b_1a_7b_2+2a_6b_1a_8b_5+2a_7b_2a_8b_5\\
&+2a_1b_7a_2b_6-2a_1b_7a_3b_8+2a_1b_7a_4b_5-2a_1b_7a_5b_4-2a_1b_7a_6b_2+2a_1b_7a_7b_1+2a_1b_7a_8b_3\\
&-2a_2b_6a_3b_8+2a_2b_6a_4b_5-2a_2b_6a_5b_1-2a_2b_6a_6b_2+2a_2b_6a_7b_1+2a_2b_6a_8b_3\\
&-2a_3b_8a_4b_5+2a_3b_8a_5b_4+2a_3b_8a_6b_2-2a_3b_8a_7b_1-2a_3b_8a_8b_3\\
&-2a_4b_5a_5b_4-2a_4b_5a_6b_2+2a_4b_5a_7b_1+2a_4b_5a_8b_3\\
&+2a_5b_4a_6b_2-2a_5b_4a_7b_1-2a_5b_4a_8b_3-2a_6b_2a_7b_1-2a_6b_2a_8b_3+2a_7b_1a_8b_3\\
&+2a_1b_8a_2b_4+2a_1b_8a_3b_7-2a_1b_8a_4b_2+2a_1b_8a_5b_6-2a_1b_8a_6b_5-2a_1b_8a_7b_3+2a_1b_8a_8b_1\\
&+2a_2b_4a_3b_7-2a_2b_4a_4b_2+2a_2b_4a_5b_6-2a_2b_4a_6b_5-2a_2b_4a_7b_3+2a_2b_4a_8b_1\\
&-2a_3b_7a_4b_2+2a_3b_7a_5b_6-2a_3b_7a_6b_5-2a_3b_7a_7b_3+2a_3b_7a_8b_1\\
&-2a_4b_2a_5b_6+2a_4b_2a_6b_5+2a_4b_2a_7b_3-2a_4b_2a_8b_1\\
&-2a_5b_6a_6b_5-2a_5b_6a_7b_3+2a_5b_6a_8b_1+2a_6b_5a_7b_3-2a_6b_5a_8b_1-2a_7b_3a_8b_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2+(a_3b_3)^2+(a_4b_4)^2+(a_5b_5)^2+(a_6b_6)^2+(a_7b_7)^2+(a_8b_8)^2\\
&+(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2+(a_3b_5)^2+(a_4b_8)^2+(a_5b_3)^2+(a_6b_7)^2+(a_7b_6)^2+(a_8b_4)^2\\
&+(a_1b_3)^2+(a_2b_5)^2+(a_3b_1)^2+(a_4b_6)^2+(a_5b_2)^2+(a_6b_4)^2+(a_7b_8)^2+(a_8b_7)^2\\
&+(a_1b_4)^2+(a_2b_8)^2+(a_3b_6)^2+(a_4b_1)^2+(a_5b_7)^2+(a_6b_3)^2+(a_7b_5)^2+(a_8b_2)^2\\
&+(a_1b_5)^2+(a_2b_3)^2+(a_3b_2)^2+(a_4b_7)^2+(a_5b_1)^2+(a_6b_8)^2+(a_7b_4)^2+(a_8b_6)^2\\
&+(a_1b_6)^2+(a_2b_7)^2+(a_3b_4)^2+(a_4b_3)^2+(a_5b_8)^2+(a_6b_1)^2+(a_7b_2)^2+(a_8b_5)^2\\
&+(a_1b_7)^2+(a_2b_6)^2+(a_3b_8)^2+(a_4b_5)^2+(a_5b_4)^2+(a_6b_2)^2+(a_7b_1)^2+(a_8b_3)^2\\
&+(a_1b_8)^2+(a_2b_4)^2+(a_3b_7)^2+(a_4b_2)^2+(a_5b_6)^2+(a_6b_5)^2+(a_7b_3)^2+(a_8b_1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_1^2b_3^2+a_1^2b_4^2+a_1^2b_5^2+a_1^2b_6^2+a_1^2b_7^2+a_1^2b_8^2\\
&+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_2^2b_3^2+a_2^2b_4^2+a_2^2b_5^2+a_2^2b_6^2+a_2^2b_7^2+a_2^2b_8^2\\
&+a_3^2b_1^2+a_3^2b_2^2+a_3^2b_3^2+a_3^2b_4^2+a_3^2b_5^2+a_3^2b_6^2+a_3^2b_7^2+a_3^2b_8^2\\
&+a_4^2b_1^2+a_4^2b_2^2+a_4^2b_3^2+a_4^2b_4^2+a_4^2b_5^2+a_4^2b_6^2+a_4^2b_7^2+a_4^2b_8^2\\
&+a_5^2b_1^2+a_5^2b_2^2+a_5^2b_3^2+a_5^2b_4^2+a_5^2b_5^2+a_5^2b_6^2+a_5^2b_7^2+a_5^2b_8^2\\
&+a_6^2b_1^2+a_6^2b_2^2+a_6^2b_3^2+a_6^2b_4^2+a_6^2b_5^2+a_6^2b_6^2+a_6^2b_7^2+a_6^2b_8^2\\
&+a_7^2b_1^2+a_7^2b_2^2+a_7^2b_3^2+a_7^2b_4^2+a_7^2b_5^2+a_7^2b_6^2+a_7^2b_7^2+a_7^2b_8^2\\
&+a_8^2b_1^2+a_8^2b_2^2+a_8^2b_3^2+a_8^2b_4^2+a_8^2b_5^2+a_8^2b_6^2+a_8^2b_7^2+a_8^2b_8^2
\end{aligned}
$$

左辺＝右辺より☆も同時に示された。 //(証明終わり)

以上のように数空間の**「積におけるノルム演算（||a||||b||=||ab||）」の成立が確認できた。**

このように実際に計算してみると、☆を満たす次元数 n は $n=1,2,4,8,\cdots$ のみであることが分かる（$n=2^m$ （$m=0,1,2,3,\cdots$））。 しかし、16 以降はシンドイ !!

また、八元数は積演算が非可換（四元数）だけでなく非結合（$a(bc)\fallingdotseq(ab)c$ ）である。

（∵ Fano 平面より明らか　例：$(ij)k=lk=-n\fallingdotseq n=im=i(jk)$ ·····マイナスで等しい ）

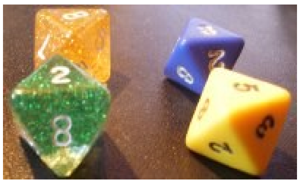
以下同様に十六元数を作ると、非可換・非結合だけでなく更に非分配（$a(b+c)\fallingdotseq ab+ac$ ）

となる（ようである）。いま、先に述べたフルウ゛ィッツ氏に敬意を表して納得したい。

　したがって、ベクトル空間（線形空間）上で安定したノルム（量）演算を可能とするためには、高次元（多次元）空間から徐々に不便な次元が自ずと取り除かれて（存在できない）、現在の宇宙空間が完成したものと思われる。数学的に無限次元線形空間は想定できるが、現実に物質が存在した場合には四則演算だけでなく、微積分に始まり多くの演算を可能とするために最低限必要な安定した空間（次元）が最終的に残る。つまり、原始空間（次元）から見れば自然収束であり、我々から見れば畳み込みである。フルウ゛ィッツの偉大な発見は、3次元空間に正多面体（n面体）が$n=4,6,8,12,20$ の5種類しか存在しないことに似ている。また、四元数の非可換さは時空間（4次元）における相対性理論の片道切符に似ている。エントロピー増大法則や因果律も時空間（4次元）における非可換である。

（参照：物質と空間と時間の捉え方）

　またこれも計算して分かった直観であるが、純虚八元数空間（実部を除く）の7次元と時空間（3＋1次元）の4次元で、確かに１１次元空間となる。つまり、光子などの量子は高次元（5次元以上）では波の状態（波動）であり我々（3次元空間）に観測されると質点（量）に収束するのである。（参照：次元交錯と超双対）・・・これが畳み込みの原理なのか!!



2026.1.6　自宅にて

続　畳み込み

前回、アドルフ フルウ゛ィッツに敬意を表して納得していたが、「16元数ではなぜ成り立たないのか？」「16元数では何がいけないのか？」が具体的に心底納得していない事が自分で気になって仕方がない。

　そこでまた色々と考えてみた。疑問がおよそ以下の3つくらいある。①：|a||b|=|ab|と$(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2+\cdots+b_n{}^2)=c_1{}^2+c_2{}^2+c_3{}^2+\cdots+c_n{}^2$　・・・☆の違い。②：16元数で☆を満たさない証明。③：|a||b|=|ab|の物理的な意味。である。この順番で考えてみたい。

① について：

$$\|a\|\|b\|=\|ab\| \quad ・・・★$$

と

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2)=c_1^2+c_2^2+c_3^2+\cdots+c_n^2 \quad ・・・☆$$

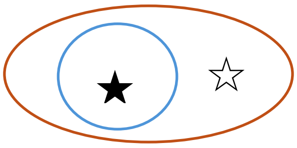
とおくと、　★ ⇒ ☆ であることが、すぐに分かる。

証）

$\|a\|\|b\|=\|ab\|$ を平方して $|a|^2|b|^2=|ab|^2$ となる。 $ab=c$ とおく

$|a|^2|b|^2=|ab|^2=|c|^2$ より

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2)=c_1^2+c_2^2+c_3^2+\cdots+c_n^2$ となる。//

つまり、 ★ $\overset{\text{ならば}}{\Rightarrow}$ ☆ であり、真理集合は 

となる（筈（はず））。

② について：　16 元数で☆を満たさない証明は、反例（満たさない例）を 1 つだけ示せばよい。つまり、実際に計算した具体例で反例を示したい。

$$\begin{aligned}a&=a_1+a_2i+a_3j+a_4k+a_5l+a_6m+a_7n+a_8o\\&\quad+(a_9+a_{10}i+a_{11}j+a_{12}k+a_{13}l+a_{14}m+a_{15}n+a_{16}o)p\\&=a_1+a_2i+a_3j+a_4k+a_5l+a_6m+a_7n+a_8o\\&\quad+a_9p+a_{10}ip+a_{11}jp+a_{12}kp+a_{13}lp+a_{14}mp+a_{15}np+a_{16}op\\&=\boldsymbol{a_1+a_2e_1+a_3e_2+a_4e_3+a_5e_4+a_6e_5+a_7e_6+a_8e_7}\\&\quad\boldsymbol{+a_9e_8+a_{10}e_9+a_{11}e_{10}+a_{12}e_{11}+a_{13}e_{12}+a_{14}e_{13}+a_{15}e_{14}+a_{16}e_{15}}\end{aligned}$$

と、純虚数単位を分かり易く $\boldsymbol{e_k}$ $(\boldsymbol{k=1,2,3,\cdots 14,15})$に置き換える。
同様にして、b についても次のように置き換える。

$$\begin{aligned}b&=\boldsymbol{b_1+b_2e_1+b_3e_2+b_4e_3+b_5e_4+b_6e_5+b_7e_6+b_8e_7}\\&\quad\boldsymbol{+b_9e_8+b_{10}e_9+b_{11}e_{10}+b_{12}e_{11}+b_{13}e_{12}+b_{14}e_{13}+b_{15}e_{14}+b_{16}e_{15}}\end{aligned}$$

（ただし、$a_1,\cdots a_{15}$, $b_1,\cdots b_{15}\in\mathrm{R}$）

いま、16 元数の性質（ケーリー＝ディクソン構成）により、例えば以下の数を考えよう。

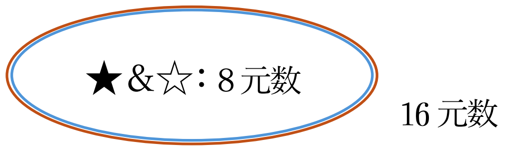
$a=e_3+e_{10}$, $b=e_{15}-e_6$ とすると、
$e_3e_{15}=e_{12}$, $e_3(-e_6)=e_5$, $e_{10}e_{15}=-e_5$, $e_{10}(-e_6)=-e_{12}$ より

$$|a|^2|b|^2=\sqrt{2}^2\times\sqrt{2}^2=2\times2=\underline{\boldsymbol{4\neq0}}=|e_{12}+e_5-e_5-e_{12}|^2=|ab|^2 \text{ となる。}$$

これは、「どのような２数に対しても多項式として表される一定の計算規則（**２乗和の積が閉じている**）を使って等式を常に成立させる。」ことができなかった例となる。

つまり、反例の一つである。更に気づいたことは、ケーリー＝ディクソン構成（単なる「入れ子（マトリョーシカ）」ではなかった！）によって、自（おの）ずと積の性質が組み込まれていたことであった。つまり、先の①における★と☆の真理集合に空白の差がある筈と思っていたところが**「実は数空間上、実質的に同値である」**と分かった。

いずれにしても、16 元数は $\overline{☆} \overset{\text{ならば}}{\Rightarrow} \overline{★}$ （★$\overset{\text{ならば}}{\Rightarrow}$☆の対偶も真）であるから等式：||a|||b||=||ab|| を満たさない！つまり、数空間の１６次元には ||a|||b||=||ab||が成り立たないという事である。



③ について：

前回の 8 元数の計算によって、☆を満たす次元数 n は $n=1,2,4,8,\cdots$ のみであることが分かった（$n=2^m$ （$m=0,1,2,3,\cdots$））。しかし、$n=16$ の場合は①②より、★も☆（同値）も両方とも同時に満たさないことがやっと分かった。納得!!

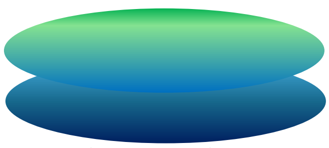
つまり、「８元数までは ||a|||b||=||ab||（積によって長さ（大きさ）が保存される。）が成り立つ」が、「１６元数からは||a|||b||=||ab||（積によって長さ（大きさ）が保存される。）が成り立たない！」（『積の保存則』と呼ぼうかな⁉）・・・どういう事を意味するのだろうか？・・・

広義数空間$n=1,2,4,8,\cdots$ （$n=2^m$ （$m=0,1,2,3,\cdots$））の中で、$n=16$ の場合は『積の保存則』が成り立たない。このn を次元に置き換えて考えると、$n=8$ ～16 の間で、目には当然見えないが何かが壊れていると思われる。以前も言ったが、もっといえば無限次元より色々な保存則が成り立ちそうで成り立たずにほとんどの次元が自（おの）ずと収束し消えてしまった（小説）。そしてやっと 8～16 の次元の狭間（はざま）で量（ノルム）の大きさが保存できそうになった！そして、質点（量子）の持つ特殊な技（振動波）が使えるようになり、8 次元に至ってやっと様々な波（量子）が『積の保存則』によって 4 次元時空間に住む我々にも観測されるようになった。（これもあたかも小説です。）私が思うに、我々の住む 4 次元空間は「4 元数空間」であって、実部（実

数直線）を共有する８元数空間の中で４元数を構成している。８元数は同様に実部（実数直線）を共有する１６元数空間の中で８元数を構成している。・・・・・・・・

つまり、原始宇宙は確率論的「重み」から有限次元（n次元）ヒルベルト空間を生み出し、様々な保存則が成り立つまで多くの次元を減らし続けやっと８次元の８元数空間に至り『積の保存則』によって安定した。振り返れば９次元以上の次元は数空間上に存在できずに次元収束（実質的消滅）してしまったと考える。

（私の数学小説では！）**安易な直観**かも知れないが、８次元と４次元は同じ空間であり数空間の実部（実数直線）は共有されている。つまり、４元数と８元数は実部（実数直線）を共有し、８元数の７つの純虚数（i,j,k,l,m,n,o）軸は８元数のルールで存在し、４元数の純虚数（i,j,k）軸は４元数のルールで存在する。その中で特に重要なことは、例えば４元数計算で $\boldsymbol{ij=k}$, $\boldsymbol{ji=-k}$ であり、$\boldsymbol{k}$ は便宜上必要な記号であって、「積の非可換な不便さを補う便利な創造（想像）物であった」という事である。４次元時空間における**時間**の存在に似ている。しかし、現在この４元数は $x\Longrightarrow \boldsymbol{i}$,$y\Longrightarrow \boldsymbol{j}$,$z\Longrightarrow \boldsymbol{k}$ と対応させて、３元（媒介変数）＋１の３次元のツールとして３次元バーコードや空間の回転にも利用されている。非可換な不便さはあるが、上手く利用すれば超便利な数空間である。少し話が逸(そ)れたが、③はやはり４元数と８元数の共存を意味していると思う。実部（実数直線）を共有し、他の純虚数７（i,j,k,l,m,n,o）個と（i,j,k）３個で総計１１個の次元が存在する。純虚数部７個の次元は観測が難しいが、７＋４次元でこの宇宙を語らないとどうしても説明がつかない事象が存在する。エントロピー増大法則や因果律も時空間(4次元)における、非可換であった。(積の保存則と非可換性)・・・ノルムと積の**保存則は神秘である。**



８次元と４次元！

2026.1.29　自宅にて